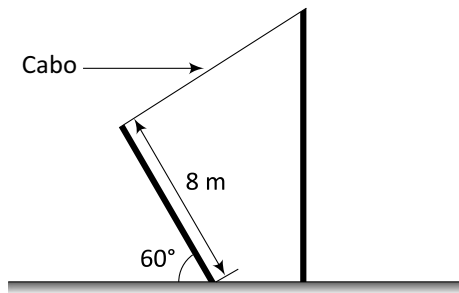


- 11| Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se um outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60° , conforme a figura a seguir.



Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo.

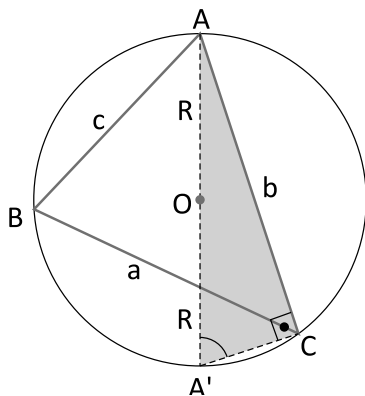
TRIGONOMETRIA EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

LEI DOS SENOS

Em qualquer triângulo, a razão entre a medida de um lado e o seno do ângulo oposto a este lado é constante e o valor desta constante é a medida do diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Demonstração:

Consideremos um triângulo ABC qualquer, inscrito na circunferência de centro O e raio R.



Tracemos, a partir do vértice A, o diâmetro $\overline{AA'}$.

Sabemos que $\hat{A}' = \frac{\widehat{AC}}{2}$ e $\hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}$ (ângulos inscritos), portanto, $\hat{A}' \equiv \hat{B}$ e $\text{sen } \hat{B} = \text{sen } \hat{A}'$.

O triângulo $AA'C$ é retângulo, pois $\hat{C} = \frac{\widehat{ABA'}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Logo, $\text{sen } \hat{A}' = \frac{b}{2R}$.

Como $\text{sen } \hat{A}' = \text{sen } \hat{B}$, então, $\text{sen } \hat{B} = \frac{b}{2R}$ ou $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$.

Analogamente, deduzimos que $\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$ e $\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$.

Logo, podemos concluir:

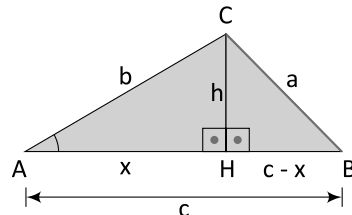
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$$

LEI DOS COSSENOS

O quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos duas vezes o produto das medidas destes lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

DEMONSTRAÇÃO:

- 1º caso – $\hat{A}$ é agudo ($0^\circ < \hat{A} < 90^\circ$)



Seja h a altura em relação ao lado $\overline{AB}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AHC e BHC:

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

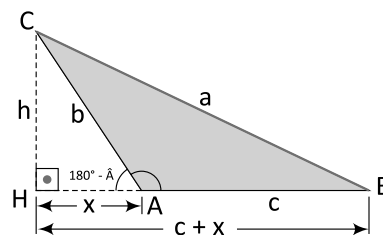
$$\Rightarrow a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 - 2 \cdot c \cdot x$$

Como $h^2 + x^2 = b^2$, temos $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x$.

O $\triangle AHC$ é retângulo, logo, $x = b \cdot \cos \hat{A}$.

Substituindo, temos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$.

- 2º caso – $\hat{A}$ é obtuso ($90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$)



Seja h a altura em relação ao lado $\overline{AB}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos AHC e BHC:

$$b^2 = h^2 + x^2 \text{ e } a^2 = h^2 + (c + x)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (h^2 + x^2) + c^2 + 2 \cdot c \cdot x$$

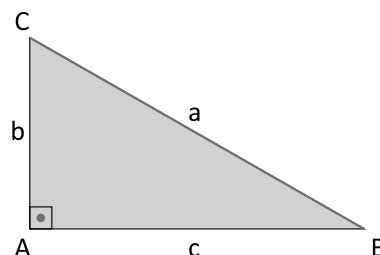
Como $h^2 + x^2 = b^2$, temos $a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot x$.

Como o $\triangle AHC$ é retângulo, $x = b \cdot \cos (180^\circ - \hat{A})$.

Porém, $\cos (180^\circ - \hat{A}) = -\cos \hat{A}$, logo, $x = -b \cdot \cos \hat{A}$.

Substituindo, temos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$.

- 3º caso – $\hat{A}$ é reto ($\hat{A} = 90^\circ$)



No $\triangle ABC$, temos $\cos \hat{A} = \cos 90^\circ = 0$. Então, a igualdade